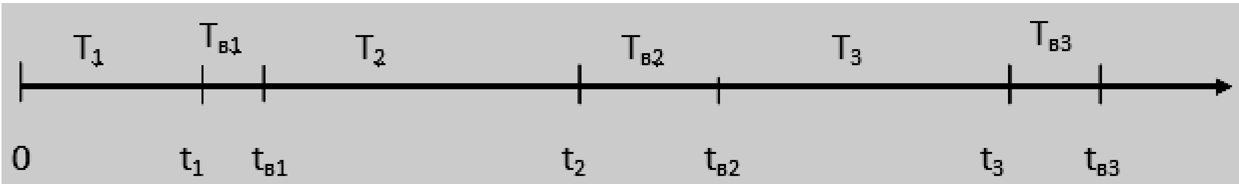
# Лекция № 8. Динамикадағы қалпына келтірілген жүйелердің сенімділігін есептеу

**Лекция мазмұны**: қалпына келтірілген жүйелердің сенімділігін есептеудің математикалық модельдері қарастырылады.

**Лекция мақсаты**: жұмыс кезінде қалпына келтірілген жүйелердің сенімділігін есептеудің негізгі әдістеріне үйрету.

## 8.1. Қалпына келтіруге болатын жүйелер. Интегро-дифференциалдық сенімділік теңдеулері

Қалпына келтірілген жүйенің жұмысын диаграмма түрінде көрсетуге болады (8.1-сурет).




8.1-сурет – Қалпына келтірілген жүйенің жұмыс істеу диаграммасы

t1 уақыттың кездейсоқ сәттерінде жүйе істен шығады, содан кейін $T_{в1}$ кезінде ол қалпына келтіріліп, $t_{в1}$ уақытында жұмыс істей бастайды және т.б. Қалпына келтірілген жүйелердің сенімділігін есептеу үшін анықтайтын екі кездейсоқ шама: жұмыс уақыты $T_1$, $T_2$,…$T_i$ және қалпына келтіру ұзақтығы $T_{в1}$, $T_{в2}$,…$T_{вi}$ , $F_1(t)$, $F_2(t)$ … $F_i(t)$ және $F_{в1}(t)$, $F_{в2}(t)$,… $F_{вi}(t)$ сәйкесінше.

Болжам: таралу функциялары F(t) және $F_B(t)$ алдыңғы істен шығулар мен қалпына келтірулер санына тәуелсіз қарастырылады (ауыспалы қалпына келтіру).

Егер қалпына келтіру нәтижесінде жүйенің қасиеттері бастапқы деңгейде сақталса, онда процесс регенеративті деп аталады. $T_1$=$T_1$ істен шығу сәттері бойынша қалыптасқан бұзылулар мен қалпына келтіру ағындары; $t_1=T_1$; $t_2=T_1+T_{в1}+\ T_2+\dots$; $t_i=T_1+T_{в1}+\ T_2+\dots\ +\ T_i$ және қалпына келтірудің аяқталуы $t_{в0}=0$; $t_{в1}=T_1+T_{в1}$; $t_{вi}=T_1+T_{в1}+\ T_2+\dots\ +\ T_{вi}$.. Бұл процестердің әрқайсысы F(t) және Fв(t) арқылы анықталатын $Ф_i(t)$ және $Ф_{вi}(t)$ таралу функцияларымен сипатталады. Қалпына келтірілген жүйенің дайындық функциясы Kg(t), ол жүйенің t уақытында жұмыс күйінде болу ықтималдығын сипаттайды, жүйеде ақау болмаған кезде де жұмыс күйінде болу ықтималдығының қосындысы. қарастырылатын уақыт аралығы $P_0(t)$ және t уақытында бір немесе бірнеше ақауларды жоюдан кейін $P_1(t)$, $P_2(t)$,... $P_i(t)$. Қарастырылып отырған оқиғалар үйлесімсіз болғандықтан, онда:

$$K_Г(t) = P_0(t) + P_1(t) + \cdots = P_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i\,(t), \qquad (8.1)$$

мұндағы $P_i(t)$ – (i+1)-ші сәтсіздіктің і-ші қалпына келтіруді аяқтау ықтималдығы, яғни $P_i(t) = P\{ t_{Bi} < t < t_{i+1} \}$.

Осылайша, $P_o(t)=1 – F(t)$ қоспағанда, ықтималдықтардың әрқайсысы екі оқиғаның ықтималдығын білдіреді: θ уақытында і-ші қалпына келтірудің аяқталуы және t-θ интервалында кейінгі ақаусыз жұмыс. , одан:

$$\mathrm{Pi}(t) = \int_0^t \Phi'_{\text{в}i}(\theta)[1 - F(t-\theta)]d\theta\,, \qquad (8.2)$$

мұндағы $\Phi\text{в}'\ i(\theta)$ і-ші қалпына келтірудің аяқталуының үлестіру функциясының туындысы, яғни $\Phi\text{в}'\ i(\theta) = P\{ti + T\text{в}i < \theta\}$.

Po(t) мәнін ескере отырып, (8.2) орнына (8.1) мынаны аламыз:

$$K_\Gamma(t) = 1 - F(t) + \int_0^t [1 - F(t-\theta)] \sum_{i=1}^{\infty} \Phi'_{\text{в}i}(\theta) d\theta = P(t) + \int_0^t P(t-\theta) h(\theta) d\theta, \text{ где } h(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi'_{\text{в}i}(\theta). \qquad (8.3)$$

і-ші қалпына келтірудің аяқталу уақытының таралу функциясы $\Phi_{\text{в}i}(t)$ F(t) және $F_{\text{в}}(t)$ функцияларымен анықталады. Осылайша, t уақыты бойынша бірінші қалпына келтіруді аяқтау $\Phi_{\text{в}1}(t)$ ықтималдығы $\theta$ уақытындағы бірінші істен шығудың және кейінгі уақыт аралығы $(t - \theta)$ ішінде қалпына келтірудің аяқталуының бірлескен оқиғасымен анықталады, яғни :

$$\Phi_{\text{в}1}(t) = \int_0^t F'(\theta)\,F(t-\theta)d\theta\ ;$$

$$\Phi_{\text{в}2}(t) = \int_0^t \Phi'_2(\theta)\,F_{\text{в}}(t-\theta)d\theta,$$

$$\Phi'_2(\theta) = \int_0^t \Phi'_{\text{B}1}(\theta)\,F(t-\theta)d\theta$$

$\Phi_i(t)$ функциясының көмегімен ақаулық ағынының v(t) сипаттамасы жетекші функция ретінде анықталады:

$$W(t) = M[v(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} iL(t)\ ;$$

$$L_i(t) = P\{t_i < t < t_{i+1}\} = \Phi_i(t) - \Phi_{i+1}(t)\ ;$$

$$W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} i[\Phi_i(t) - \Phi_{i+1}(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(t)\ .$$

Уақыт аралығы ішінде аяқталған қалпына келтіру циклдерінің саны:

$$W = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi\text{в}i(t)\ ;$$

$$\lim \int P\{t-\theta\} h(\theta) d\theta = \left(\frac{1}{\tau'}\right) \int_0^{\infty} P(t)dt\ ,$$

мұндағы $\tau' = M[T+T\text{в}] = \tau + \tau_{\text{в}}$, 8.1 ескере отырып

$$k\text{г} = \lim K\text{г}(t) = \tau/(\tau + \tau\text{в}).$$

Стационарлық қалпына келтіру процесі үшін Блэквеллдің шектік теоремасын қолданып, $\Delta t$ уақыт интервалында аламыз.

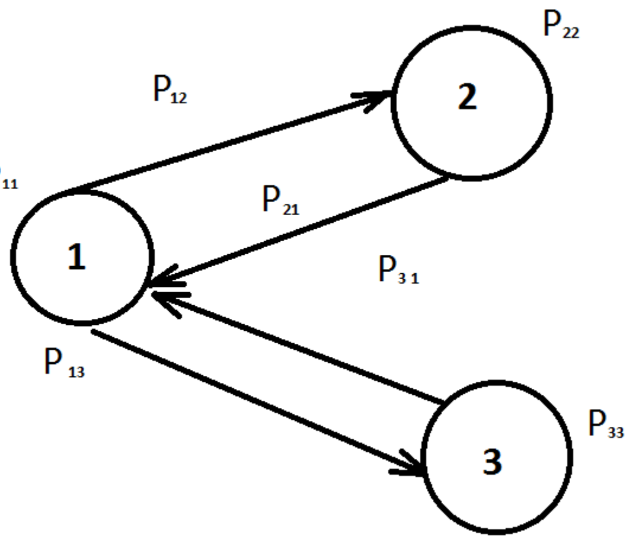
$$\lim[W(t+\Delta t) - W(t)]=\Delta t/(M[T]+M[T_в])=\Delta t/(\tau+\tau_в) \qquad (8.4)$$

Осыдан $w=1/(\tau+\tau_в)=k_г/\tau$.

## 8.2 Өтпелі ықтималдық әдісі

Ақаусыз жұмыс пен қалпына келтіру уақытын бөлудің ерікті функцияларымен жүйелердің сенімділігі жүйенің бір күйден екінші күйге өту ықтималдығының әрбір интервалында тапсырмамен уақытты дискреттеу арқылы талданады. Егер жүйенің бір күйден екінші күйге ауысу бағыттары тұрақты болса және істен шығудың кәдімгі, тәуелсіз және стационарлық ағыны туралы болжам қабылданса, жүйені дискретті уақыттық Марков жүйесі ретінде жіктеуге болады. Мұндай жүйелердің айрықша қасиеті жүйенің мүмкін болатын күйлердің кез келгеніне өту ықтималдығы, олардың саны шектеулі, тек ағымдағыға ғана байланысты және алдыңғыларға тәуелді емес. Мұндай жүйелердің сенімділігі алгебралық теңдеулер жүйесімен сипатталады, олардың саны жүйенің мүмкін болатын күйлерінің санына сәйкес келеді. Оларды құрастыру үшін бағытталған күй графигі қолданылады. Графиктің төбелері жүйенің мүмкін күйлеріне сәйкес келеді, ал шеттері бір күйден екінші күйге өтудің бағыты мен ықтималдығын сипаттайды.

Мысал ретінде үш күйде болуы мүмкін қорғаныс жүйесінің сенімділігін талдап көрейік: операциялық 1, жалған дабыл 2 және жұмыс істемейтін 3 (8.2-сурет). $\Delta t$ уақыт аралығында, $p_{11}$ ықтималдығымен жүйе жұмыс күйін сақтайды немесе $p_{12}$ және $p_{13}$ ықтималдығымен 2 немесе 3 жұмыс істемейтін күйге өтеді. Дәл осы уақыт аралығында жүйе қалпына келтіріліп, жұмыс режиміне оралады. $P_{21}$ және $p_{31}$ ықтималдығы бар күй. Барлық сәтсіз жүйелерді қалпына келтіру кезінде $p_{22}=p_{33}=0$, және $p_{21}=p_{31}=1$.




8.2-сурет – Қорғау жүйесінің күй графигі

Жүйенің і уақыт аралықтарынан кейін кез келген күйде болу ықтималдығы келесі алгебралық теңдеулер жүйесімен анықталады:

$$\begin{aligned} P_1(i) &= p_{11}\times P_1(i-1)+p_{12}\times P_2(i-1)+p_{31}\times P_3(i-1);\\ P_2(i) &= p_{12}\times P_1(i-1)+p_{22}\times P_2(i-1);\\ P_3(i) &= p_{13}\times P_1(i-1)+p_{33}\times P_3(i-1). \end{aligned} \qquad (8.5)$$

Кез келген интервалдар санынан кейін:

$$P_1(i) + P_2(i) + P_3(i) = 1$$

(4.9) теңдеулер жүйесін шешу үшін бастапқы шарттарды қою керек. Жүйе бастапқы уақытта жұмыс істеп тұрған кезде:

$$P_1(0) = 1;\ P_2(0) = P_3(0) = 0.$$

Жүйенің і-аралықтардан кейін j күйінде болу ықтималдығы мына формуламен есептеледі:

$$P_j(i) = M(0)\times M_i\times D_j. \qquad (8.6)$$

Мұндағы $M(0)=\|\ P_1(0)\ P_2(0)\ P_3(0)\|$ – жүйенің бастапқы күйінің жол векторы; M – ауысу матрицасы; $D_j$ – талданатын күйдің баған векторы.

$$D_j = \begin{matrix} 0 \\ 1: \\ 0 \end{matrix} \quad M = \begin{matrix} 1(i-1) & {}^{1i}p_{11} & {}^{1i}p_{11} & {}^{2i}p_{12} & {}^{3i}p_{13} \\ 2\,(i-1) & p_{21} & p_{21} & p_{22} & 0 \\ 3(i-1) & p_{31} & p_{31} & 0 & p_{33} \end{matrix} \quad .$$

Өтпелі матрица қарастырылып отырған мысал үшін күй графигінен тікелей құрастырылады. Өтпелі матрицасы шаршы; жолдар мен бағандар саны жүйе күйлерінің санына сәйкес келеді. Матрицаны жазу үшін келесі әдістемені қолданған ыңғайлы. Егер матрицадан тыс жүйенің і аралықтарынан кейінгі күйлерін, $1(i\text{-}1), 2(i\text{-} 1), 3(i\text{-}1)$ оның алдыңғы күйлерін $1i, 2i, 3i$ деп белгілесек, онда ауысу ықтималдықтары. сәйкес алдыңғыдан осы немесе басқа токқа. Сонымен, егер алдыңғы күй $2(i\text{-}1)$, ал ағымдағы күй $1i$ болса, онда $p2_{21}$ сәйкес жол мен бағанның қиылысында жазылады.

Осылайша, өтпелі матрицаның жолдары белгілі бір күйді сақтау және одан жүйенің басқа күйлеріне шығу ықтималдығын анықтайды; бұл ықтималдықтардың қосындысы біреуге тең. Матрицаның бағандары $P_j(i\text{-}1)$ үшін (8.5) теңдеулерінің коэффициенттерін көрсетеді. Бұл коэффициенттер барлық мүмкін болатындардан, соның ішінде талданатындардан жүйенің талданатын күйге келу ықтималдығын анықтайды. Матрицаларды көбейту кезінде оларды (8.6) қайта орналастыруға жол берілмейді. Өтпелі матрицаның реті жоғары болғанда, бұл өрнекті есептеу үшін z-түрлендіру қолданылады.

### 8.3 Өтпелі қарқындылық әдісі

Экспоненциалды үлестірім қалыпты жұмыс аймағындағы жүйелер мен олардың элементтерінің жұмысын қанағаттанарлық дәлдікпен сипаттайды. Экспоненциалды таралу бұрынғы тарихы жоқ жүйелердегі процестерді сипаттайды, өйткені олардың бір немесе басқа күйде болу ықтималдығының интервал бойынша өзгеруі тек уақыт аралығының ұзақтығына байланысты. Осылайша, жұмыс күйінің ықтималдығының төмендеуі $d\ P_o(t) = -\lambda \times e^{-\lambda t} dt = \lambda \times P_o(t)\ dt$, ал қалпына келтіру күйінің ықтималдығы $dP_1(t) = -\mu \times e^{-\mu t} \times dt = \mu \times P_1(t)\ dt$. Егер жүйе тек екі күйде - қалпына келтіру және жұмыс істеуде болуы мүмкін болса, онда бір күйдің ықтималдығының төмендеуі екінші күйдің ықтималдығының сәйкес өсуіне әкеледі, өйткені кез келген уақытта $dP_1(t) + dP_o(t) = 1$. Осылайша, t+dt уақытында әрбір күйде болатын жүйелердің ықтималдықтары сәйкес ықтималдықтармен байланысты:

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)-\lambda P_0(t)d\,t+\mu P_1(t)\,dt;$$
$$P_1(t+\Delta t)=P_1(t)-\mu P_1(t)d\,t+\lambda P_0(t)\,dt. \qquad (8.8)$$

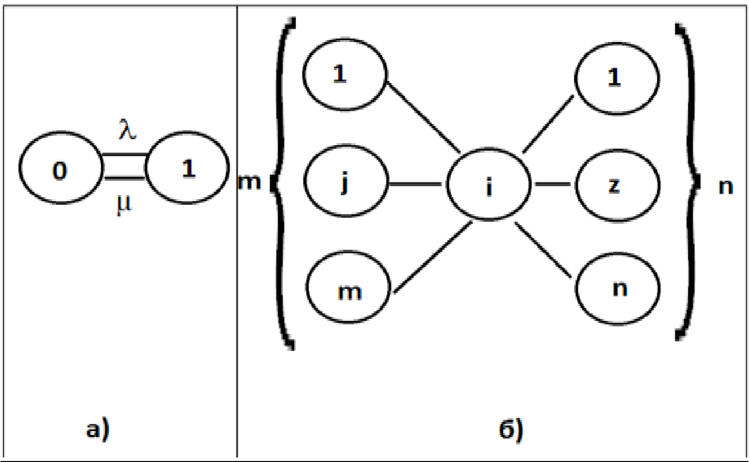
(8.5) мен (8.8) салыстыра отырып, $(1-\lambda \times dt)=p_{11}$; $\lambda \times dt=p_{12}$; $(1-\mu \times dt)=p_{22}$; $\mu \times dt=p_{21}$; Енді ауысу матрицасын (8.7) құруға болады.

$[P_i(t+dt)-P_i(t)]/dt=dP_i(t)/dt$ болғандықтан, әрбір күйдегі үздіксіз уақыт жүйесін табу ықтималдығы келесі бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесімен анықталады, олар деп аталады. Колмогоров-Чапман жүйесі:

$$P_0(t)/dt=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t);$$
$$P_1(t)/dt=\lambda P_0(t)-\mu P_1(t). \qquad (8.9)$$

Жалпы жағдайда дифференциалдық теңдеулер саны жүйенің мүмкін болатын күйлерінің санымен анықталады, олар (дискретті уақыт жүйелері үшін) шектелуі керек.

Дифференциалдық теңдеулерді жазу кезінде алдымен жүйенің мүмкін болатын күйлерінің тізімі және 8.1-суретте көрсетілгенге ұқсас сәйкес бағдарланған күй графигі құрастырылады. Төбелердің әрқайсысы жүйенің күйлерінің біріне сәйкес келеді, ал шеттердің бағыты ауысу бағытымен анықталады. Осылайша, екі күйі бар жүйе үшін жоғарыда қарастырылған күй графигі әдетте 8.3а-суретте көрсетілген формада бейнеленген.




8.3-сурет – Қалпына келтірілетін жүйенің күй графигі

Жүйе m төбеден келетін және одан n төбенің біріне шығатын еркікті i төбесі үшін (8.3б-сурет):

$$dP_i\,(t)\,/dt = \sum_{j=1}^{m} \Lambda_{ji}\, dP_j\,(t) - P_i\,(t) \sum_{z=1}^{n} \Lambda_{iz}\,.$$

Дифференциалдық теңдеулер жүйесі құрамының дұрыстығын тексеру – теңдеулердің оң жақтарының қосындысы нөлге тең. Қалпына келтірілетін үздіксіз уақыт жүйелерінің сенімділігін талдау кезінде екі топтағы мәселелер туындайды. Біріншісі функциялар мен қолжетімділік пен тоқтап қалу факторларын анықтаумен, істен шығу ағынының параметрімен, екіншісі ақаусыз жұмыс істеу ықтималдығын және істен шығудың орташа уақытын есептеумен байланысты. Бірінші топтағы мемлекеттердің мәселелерін шешу кезінде. Жүйе істен шыққан жағдайда олар шағылыстырады, яғни қалпына келтіру аяқталғаннан кейін жүйе жұмыс күйлерінің біріне оралады. Есептердің екінші тобын шешу кезінде жүйенің қалпына келтіру күйлері жұтылады және осы күйлерден шығу жылдамдығы алынып тасталады.

Дайындық функциясы KG(t) жүйенің t уақытында жұмыс күйінде болу ықтималдығын анықтайтындықтан, онда:

$$K\text{г}\,(t) \;=\; \sum_{j=1}^{k} Pj\,(t) \;=\; 1 - \sum_{z=1}^{\varepsilon} P_z\,(t)\,, ,$$

мұндағы j және z жүйенің жұмыс және жұмыс істемейтін күйлері.

Күту функциясы:

$$K\text{п}\,(t) = 1 - K\text{г}\,(t) = 1 - \sum_{j=1}^{k} P_j\,(t) \;=\; \sum_{z=1}^{\varepsilon} P_z\;\;(t). \qquad (8.11)$$

Кг қолжетімділік коэффициентін анықтау үшін бірнеше әдістерді қолдануға болады. Олардың бірі t→∞ кезіндегі $K\text{г}\;(t)$ шегін тікелей есептеуге негізделген. Екіншісі шектік теореманы пайдаланады, оған сәйкес $\lim_{t\to\infty} K\text{г}\;(t) = \lim_{p\to 0} pK\text{г}\;(p)$, мұндағы р = Лаплас түрлендіру айнымалысы; $K\text{г}(\text{p})$ - $K\text{г}\;(t)$ функциясының Лаплас кескіні. Қол жетімділік коэффициентін $dP_i\,(t)/\,dt = 0$ мәнін нөлге қою және жүйенің барлық операциялық күйлері үшін алгебралық теңдеулер жүйесін шешу арқылы дифференциалдық теңдеулер жүйесін қолдану арқылы есептеуге болады. Осылайша, (8.9) жүйесі үшін kГ есептеуге арналған алгебралық теңдеулер келесідей болады:

$$-\lambda \times P_o + \mu \times P_1 = 0;\ P_o + P_1 = 1;\ \textit{содан}\ k_г = P_o = \mu/(\mu + \lambda).$$

Дискретті-уақыттық жүйелер үшін үздіксіз жүйелердің қолжетімділік коэффициентінің аналогы алгебралық теңдеулер жүйесімен (8.9) анықталатын операциялық күйдегі жүйені табудың максималды ықтималдығы екені анық. Ақаулық ағыны және қалпына келтірілетін жүйенің жетекші функциясы:

$$\omega(t) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{z=1}^{\varepsilon} \Lambda jz * Pj(t);\quad W(t) = \int_0^t \omega(t)dt\,. \qquad (8.12)$$

t интервалындағы ақаулар арасындағы орташа уақыт:

$$\tau_{ср}(t) = \int_0^t K_г\ (t)dt - \int_0^t \omega(t)dt\,.$$

Стационарлық қалпына келтіру процесі кезінде $t\to\infty$ $\omega(t) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{z=1}^{\varepsilon} \Lambda jz \times Pj$ болғанда; мұндағы $P_j = lim\ P_j(t)$ – j-ші жұмыс күйінің соңғы ықтималдығы. Ақаулар арасындағы орташа уақыт $\tau = k_г/\ \omega$.

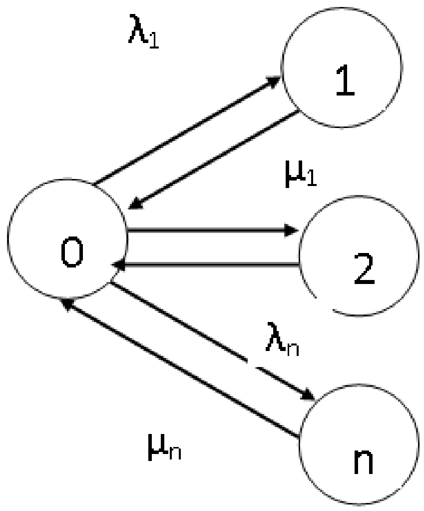
Жоғарыда қарастырылған екі мемлекеттік жүйе үшін:

$$\omega(t) = \lambda \times P_o(t) = \lambda \times K_г(t),$$

$$t\to\infty\ \omega = \lambda \times P_o = \lambda \times K_г;\ \tau_{ср} = 1/\ \lambda. \qquad (8.13)$$

Дифференциал жүйесіндегі есептердің екінші тобын шешу кезінде жұтылу күйінен шығу интенсивтілігін факторлар ретінде қамтитын теңдеулер, терминдер алынып тасталады. Бұл жағдайда ақаусыз жұмыс істеу ықтималдығы $P(t) = \Sigma\ Pj\ (t)\ (j = 1..k)$, мұндағы $k$ жүйенің барлық жұмыс күйлері. Ақаулар арасындағы орташа уақыт $\tau_{ср}(t)=\int P_0(t)dt$ ретінде есептеледі

Қарастырылған талдау әдісін неғұрлым күрделі қалпына келтірілетін жүйелердің сенімділік көрсеткіштерін бағалау үшін қолданамыз, атап айтқанда, n қатарға қосылған артық емес элементтерді қамтитын, олардың әрқайсысы $\lambda_i$ және $\mu_I$ қалпына келтірудің істен шығу жылдамдығымен сипатталады. Мәселенің қарапайым нұсқасын қарастырайық, онда элементтердің кез келгені істен шыққаннан кейін жүйе өшеді. Мұндай жүйенің құрылымдық схемасы 5.1-суретте, ал күй графигі 8.4-суретте көрсетілген.




8.4-сурет – n қатар қосылған элементтер жүйесінің күй графигі

Нөлден басқа барлық күйлерде жүйе өшіріліп, сәйкес элемент қалпына келтіріледі. Кез келген уақытта жүйенің сенімділігі келесі дифференциалдық теңдеулермен сипатталады:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{dP_0(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\times P_0(t) + \mu_1 \times P_1(t) + \cdots + \mu_n \times P_n(t) \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_1 \times P_0(t) - \mu_1 \times P_1(t) \\ \frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_n \times P_0(t) - \mu_n \times P_n(t) \\ P_0(t) + P_1(t) + \cdots + P_n(t) \end{array}\right\}.$$

Лаплас түрлендіруімен дайын функция:

$$К_г(p) = P_0(p) = 1/p\left[1 + \frac{\lambda_1}{p+\mu_1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{p+\mu_n}\right].$$